

1. Докажите (не используя теорему о сумме углов треугольника), что внешний угол треугольника больше любого внутреннего угла, не смежного с ним.
2. Докажите, что против большей стороны в треугольнике лежит больший же угол. Докажите обратную теорему.
3. Докажите три неравенства (*неравенство треугольника*): $a + b > c$, $a + c > b$, $b + c > a$. Докажите следующие короткие формулировки этого неравенства: а) $a + b > c > |a - b|$; б) если c — наибольшая сторона, то $a + b > c$.
4. Докажите соотношения в прямоугольном треугольнике (см. рис. 1): а) $a^2 = cx$, $b^2 = yz$; б) $h^2 = xy$; в) $c^2 = a^2 + b^2$ (*теорему Пифагора*).

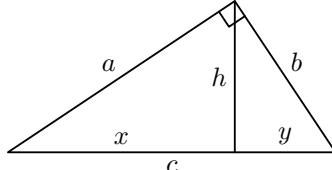


Рис. 1

5. В треугольнике ABC проведена биссектриса BD . Докажите, что $AB : BC = AD : DC$.
6. Докажите формулы для углов, образованных хордами в окружности (см. рис. 2): а) $x = \frac{\alpha}{2}$; б) $x = \frac{\alpha+\beta}{2}$.

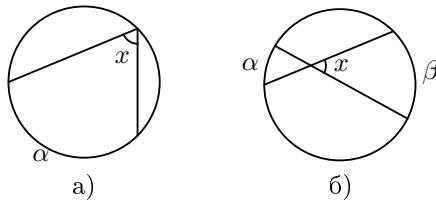


Рис. 2

7. Докажите формулы для углов между хордой и касательной, а также для углов с вершиной вне окружности (см. рис. 3): а) $x = \frac{\alpha}{2}$; б) $x = \frac{\alpha-\beta}{2}$; в) $x = \frac{\alpha-\beta}{2} = \alpha - 180^\circ$.

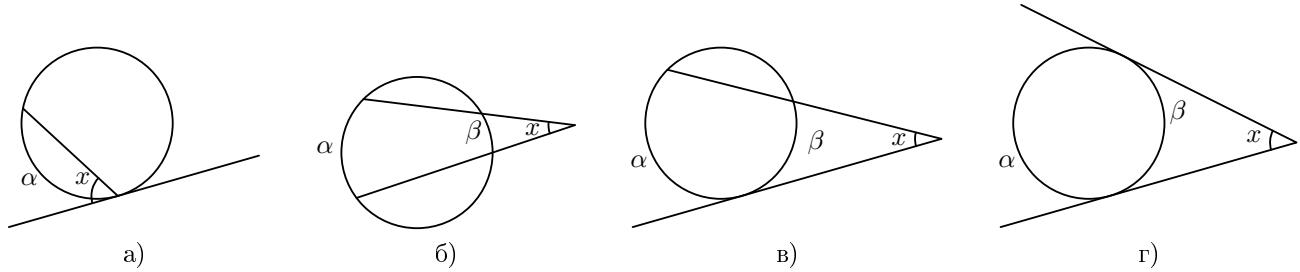


Рис. 3

8. Докажите, что $\triangle PAC \sim \triangle PDB$ (рис. 4). Выведите отсюда, что $PA \cdot PB = PC \cdot PD$.

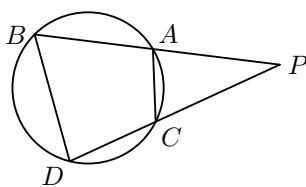


Рис. 4

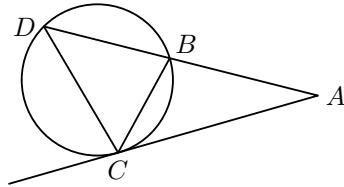


Рис. 5

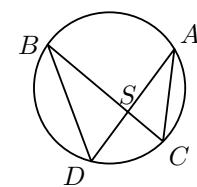


Рис. 6

9. Докажите, что $\triangle ABC \sim \triangle ACD$ (рис. 5). Докажите, что $AC^2 = AD \cdot AB$.
10. Докажите, что $\triangle SCB \sim \triangle SAD$ (рис. 6). Докажите, что $CS \cdot SD = BS \cdot SA$.
11. Докажите, что геометрическим местом точек, из которых данный отрезок AB виден под данным углом α есть две дуги двух окружностей. В каком случае эти дуги на самом деле образуют одну окружность?
12. Докажите, что точка, симметричная ортоцентру (точке пересечения высот) относительно стороны треугольника, лежит на окружности, описанной около треугольника.
13. В треугольнике ABC с $\angle BAC = \alpha$ проведены высоты BB_1 и CC_1 , пересекающиеся в точке H . Докажите, что $AH = BC \cdot |\operatorname{ctg} \alpha|$.
14. В треугольнике ABC с $\angle BAC = \alpha$ проведены высоты BB_1 и CC_1 . Докажите, что $\triangle AB_1C_1 \sim \triangle ACB$ с коэффициентом подобия $|\cos \alpha|$.
15. В треугольнике ABC проведены высоты AA_1 , BB_1 и CC_1 . Докажите, что прямые AA_1 , BB_1 и CC_1 содержат биссектрисы углов треугольника $A_1B_1C_1$.

16. Докажите, что углы со взаимно перпендикулярными сторонами либо равны, либо дополняют друг друга до 180° . Докажите аналогичное утверждение для углов с соответственно параллельными сторонами.

17. (сравните с задачей 5) В $\triangle ABC$ проведена биссектриса CD внешнего угла ECB (рис. 7). Докажите, что $AD : DB = AC : CB$. В каком случае $CD \parallel AB$?

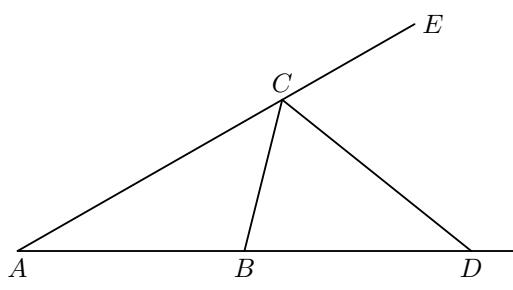


Рис. 7

18. Найдите косинусы, синусы, тангенсы и котангенсы углов в $45^\circ, 30^\circ, 60^\circ, 120^\circ, 150^\circ, 90^\circ, 0^\circ, 180^\circ$.

19. Найдите $\cos 72^\circ$ и $\sin 18^\circ$.

20. Докажите теорему косинусов: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$.

21. Докажите теорему синусов:

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R.$$

22. Докажите теорему Птолемея для вписанного четырёхугольника $ABCD$: $AB \cdot CD + BC \cdot AD = AC \cdot BD$.

23. Докажите теорему, обратную теореме Птолемея.

24. С помощью теоремы Птолемея докажите формулы:

- $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$;
- $\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$.

25. Окружность, описанная около треугольника [Погорелов, § 5, п. 3].

26. Окружность, вписанная в треугольник [Погорелов, § 5, п. 4].

Важные замечания

1) Прочитать *весь* § 5 учебника Погорелова. Знать определение геометрического места точек. Уметь выполнять простейшие построения циркулем и линейкой.

2) Знать формулировки (без доказательства) трёх признаков равенства треугольников и трёх признаков подобия треугольников.